自然数パラメーターガンマ事前分布に従う未知インテンシティを持つポアソン到着選択問題の最適停止時刻について (数理最適化の理論とアルゴリズム)

来島, 愛子; 穴太, 克則

数理解析研究所講究録 1241 巻 2001 年 10-18

自然数パラメーターガンマ事前分布に従う 未知インテンシティを持つポアソン到着選択問題の 最適停止時刻について

来島愛子 (Aiko Kurushima) 東京大学 (Univ. of Tokyo)
穴太克則 (Katsunori Ano) 南山大学 (Nanzan Univ.)

1 はじめに

古典的秘書問題の拡張であるポアソン到着選択問題においてポアソン過程のパラメータ λ の事前分布が non-informative 分布および指数分布に従うとき，Bruss(1987) によって最適停止規則が求められている．指数事前分布 $Ga(1,1/a)$ のとき最適停止規則は $s^*=(T+a)/e-a$ 以降に到着する相対的ベストで停止しろ，となる．指数分布を含むガンマ分布 $Ga(r,1/a)$ に対して，$r=2$ の場合の最適停止規則は Ano(2000) によって解かれている．

本論文では，彼らの問題を含む自然数パラメータ r のガンマ分布の場合の最適停止規則を解く．最適停止規則は X_j を j 番目に到着したアパートの相対ランク，s_j をそのアパートの到着時刻としたときに，

$$\tau_r^*=\min\{s_j^{(r)*}\le s_j : X_j=1\}$$

となる．ここで，$s_j^{(r)*}$ はある方程式によって定められ，j について非増加列である．

2 準備

ある所与の時刻 T までにアパートを見つけたい．アパートを調べる機会は intensity λ のポアソン過程に従って到着する．調べるごとにすぐに，このアパートに決めるか否かを決めなければならない．時間間隔 $(0,T]$ の間に到着するアパートはランク付け可能であり，最も良いランクのアパートをベストと呼ぶ．現在までに到着しているアパートの中での最も良いランクのアパートを相対的ベストと呼ぶ．言うまでもないが，時刻 T に到着した相対的ベストはベストとなる．時間間隔 $(0,T]$ の間に調べることができるアパートの中からベストのアパートを選ぶ確率を最大にする最適停止時刻を求めたい．

ポアソン過程の intensity λ が未知で，その事前分布がガンマ分布 $Ga(r,1/a)$，r は自然数，$a>0$ をもつという問題を考える．ポアソン過程 $\{N(t)\}_{t\ge0}$ の到着時刻を $\tau_1,\tau_2,\cdots$ とする．また，λ の密度関数は

$$g(\lambda)=\frac{a^r}{\Gamma(r)}e^{-a\lambda}\lambda^{r-1}I(\lambda\ge0). \tag{1}$$

このとき，次の補題により，$\tau_1=s_1,\cdots,\tau_i=s$ が与えられたときの $N(T)$ の事後分布が与えられる．証明は Ano(2000) を参照されたい．

補題 1 $\tau_1 = s_1, \cdots, \tau_i = s$ が与えられたときの $N(T)$ の事後分布は τ_i と i の値のみに依存し，パラメータ $r+i$, $(s+a)/(T+a)$ の負の二項分布，

$$P(N(T)=n|\tau_1 = s_1, \ldots, \tau_i = s) = \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r+i)(n-i)\,!}\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r+i}\left(\frac{T-s}{T+a}\right)^{n-i} \quad (2)$$

になる．

まず，$r=2$ の場合を整理して述べて，$r=3,4,\ldots$ の場合の準備とする．

$U_i^{(r)}(s)$ を時刻 $\tau_i = s$ で到着したアパートが相対的ベストアパートであるとき，このアパートを選択したときの真のベストを得る最大確率とする．公式

$$\frac{(n+r-1)\,!}{n} = (r-1)\,!\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(n+j-1)\,!}{j\,!}, r=1,2,\cdots \quad (3)$$

を用いると，ガンマ事前分布 $Ga(r, 1/a)$ に対する $U_i^{(r)}(s)$ は

$$\begin{aligned} U_i^{(r)}(s) &= E\left(\frac{i}{N(T)}\middle|\tau_i = s\right) \\ &= \sum_{n\geq i}\left(\frac{i}{n}\right)P(N(T)=n|\tau_i = s) \\ &= \frac{i(r-1)\,!}{(i+r-1)\,!}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(i+j-1)\,!}{j\,!}\theta^{r-j}. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで，$\theta = (s+a)/(T+a)$.

時刻 $\tau_i = s$ で相対的ベストアパートが到着し，それ以降のはじめての相対的ベストアパートが $i+k$ 番目であり，その到着時刻が $\tau_{i+k} = s+u, (u>0)$ である推移確率を $p_{(i,s)}^{(k,u)}$ とする．このとき，時刻 $\tau_i = s$ に到着した相対的ベストアパートを選択せず，次に到着する相対的ベストアパートを選択したときに，この選択したアパートが真のベストである確率は

$$\int_0^{T-s}\sum_{k\geq 1}p_{(i,s)}^{(k,u)}U_{i+k}^{(r)}(s+u)du \quad (5)$$

となる．

ガンマ事前分布 $Ga(r, 1/a)$ に対する推移確率 $p_{(i,s)}^{(k,u)}$ はポアソン過程の到着時間間隔分布がガンマ分布であり，$\tau_i = s$ が与えられたときの λ の事後分布 $g(\lambda|\tau_i = s)$ は

$$g(\lambda|\tau_i = s) = \frac{\lambda^{i+r-1}e^{-\lambda(s+a)}}{\int_0^\infty u^{i+r-1}e^{-u(s+a)}du} = \frac{\lambda^{i+r-1}e^{-\lambda(s+a)}}{\Gamma(i+r)/(s+a)^{i+r}} \quad (6)$$

で与えられる．i 番目に相対的ベストが出たときそのあとはじめての相対的ベストが $i+k$ 番目である条件付確率が $i/((i+k-1)(i+k))$ であるから，

$$\begin{aligned} p_{(i,s)}^{(k,u)} &= \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda u}(\lambda u)^{k-1}}{\Gamma(k)}\frac{i}{(i+k-1)(i+k)}\frac{\lambda^{i+r-1}e^{-\lambda(s+a)}(s+a)^{i+r}}{\Gamma(i+r)}d\lambda \\ &= \frac{i(s+a)^{i+r}u^{k-1}}{\Gamma(k)\Gamma(i+r)(i+k)(i+k-1)}\int_0^\infty \lambda^{i+r+k-1}e^{-\lambda(s+a+u)}d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(i+k+r)}{\Gamma(k)\Gamma(i+r)}\frac{i}{(i+k)(i+k-1)}\frac{s+a}{(s+a+u)^2}\left(\frac{s+a}{s+a+u}\right)^{i+r-1}\left(\frac{u}{s+a+u}\right)^{k-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

したがって，$G_i^{(r)}(s)$ を

$$G_i^{(r)}(s) \equiv U_i^{(r)}(s) - \int_0^{T-s} \sum_{k\geq 1} p_{(i,s)}^{(k,u)} U_{i+k}^{(r)}(s+u)du \tag{8}$$

としたとき，OLA 停止領域 B_r は $B_r = \{(i,s) : G_i^{(r)}(s) \geq 0\}$ で与えられる．ここで (i,s) は時刻 $s \in (0,T]$ で i 番目のアパートが到着していて，そのアパートが相対的ベストである状態を表す．$G_i^{(r)}(s) \geq 0$ ならば，$G_{i+k}^{(r)}(s+u) \geq 0$, $k = 0,1,2,\ldots$, $u \in (0, T-s]$ が成り立つならば，すなわち，$P((i+k, s+u) \in B_r | (i,s) \in B_r) = 1$ ならば，B_r は "closed" であると呼ばれ，B_r が最適停止領域となり，OLA 停止規則 $\tau = \min\{0 < s \leq T : (i,s) \in B_r\}$ が最適停止時刻となることが知られている（Ross(1970) または穴太 (2000) 3 章参照）．

自然数 r について $G_i^{(r)}(s)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
G_i^{(r)}(s) &= \frac{i(r-1)!}{(i+r-1)!} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(i+j-1)!}{j!} \left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j} \\
&\quad - \int_0^{T-s} \sum_{k\geq 1} \frac{\Gamma(i+k+r)}{\Gamma(k)\Gamma(i+r)} \frac{i}{(i+k)(i+k-1)} \frac{s+a}{(s+a+u)^2} \left(\frac{s+a}{s+a+u}\right)^{i+r-1} \left(\frac{u}{s+a+u}\right)^{k-1} \\
&\quad \times \frac{(i+k)(r-1)!}{(i+k+r-1)!} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(i+k+j-1)!}{j!} \left(\frac{s+a+u}{T+a}\right)^{r-j} du \\
&= \frac{i(r-1)!}{(i+r-1)!} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(i+j-1)!}{j!} \left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j} \\
&\quad - \int_0^{T-s} \sum_{k\geq 1} \frac{(r-1)!}{(k-1)!(i+r-1)!} \frac{i}{i+k-1} \frac{s+a}{(s+a+u)^2} \left(\frac{s+a}{s+a+u}\right)^{i+r-1} \left(\frac{u}{s+a+u}\right)^{k-1} \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(i+k+j-1)!}{j!} \left(\frac{s+a+u}{T+a}\right)^{r-j} du.
\end{aligned}$$

ここで，

$$H_i^{(r)}(s) \equiv \frac{(i+r-1)!}{i!(r-1)!} \frac{T+a}{s+a} G_i^{(r)}(s)$$

とすると，

$$\begin{aligned}
H_i^{(r)}(s) &= \frac{(i+r-1)!}{i!(r-1)!} \frac{T+a}{s+a} \frac{i(r-1)!}{(i+r-1)!} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(i+j-1)!}{j!} \left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j} \\
&\quad - \frac{(i+r-1)!}{i!(r-1)!} \frac{T+a}{s+a} \int_0^{T-s} \sum_{k\geq 1} \frac{(i+k+r-1)!}{(k-1)(i+r-1)} \frac{i}{(i+k)(i+k-1)} \frac{s+a}{(s+a+u)^2} \\
&\quad \times \left(\frac{s+a}{s+a+u}\right)^{i+r-1} \left(\frac{u}{s+a+u}\right)^{k-1} \frac{(i+k)(r-1)!}{(i+k+r-1)!} \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(i+k+j-1)!}{j!} \left(\frac{s+a+u}{T+a}\right)^{r-j} du \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(i+j-1)!}{(i-1)!j!} \left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j-1} - \int_0^{T-s} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(i-1)!(k-1)!} \frac{1}{i+k-1} \frac{1}{s+a+u} \\
&\quad \times \left(\frac{s+a}{s+a+u}\right)^{i+r-1} \left(\frac{u}{s+a+u}\right)^{k-1} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(i+k+j-1)!}{j!} \left(\frac{s+a+u}{T+a}\right)^{r-j-1} du \qquad (9)
\end{aligned}$$

と書ける．したがって，B_r は

$$B_r = \{(i, s) : H_i^{(r)}(s) \geq 0\}$$

と書くことができる．

$\hat{\theta} = (s+a)/(s+a+u)$ とおくと，(9) の右辺第 2 項は,

$$\begin{aligned}(9)\text{ の右辺第 2 項} \quad = \quad & -\int_0^{T-s} \sum_{k \geq 1} \frac{(r-1)\,!}{(k-1)\,!\,(i+r-1)\,!} \frac{i}{i+k-1} \frac{s+a}{(s+a+u)^2} \\ & \times \hat{\theta}^{i+r-1}(1-\hat{\theta})^{k-1} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(i+k+j-1)\,!}{j\,!} \left(\frac{s+a+u}{T+a}\right)^{r-j} du\end{aligned}$$

となる．

公式 (3) において $n = i+k-1$，$r = j+1$ とすると,

$$\frac{(i+k+j-1)\,!}{i+k-1} = j\,! \sum_{l=0}^{j} \frac{(i+k+l-2)\,!}{l\,!}$$

となり，これを用いると,

$$\begin{aligned}&(9)\text{ の右辺第 2 項} \\ &= -\int_0^{T-s} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(i-1)\,!\,(k-1)\,!} \frac{1}{s+a+u} \hat{\theta}^{i+r-1}(1-\hat{\theta})^{k-1} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j\,!} j\,! \sum_{l=0}^{j} \frac{(i+k+l-2)\,!}{l\,!} \left(\frac{s+a+u}{T+a}\right)^{r-j-1} du \\ &= -\int_0^{T-s} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{j} \sum_{k \geq 1} \frac{(i+k+l-2)\,!}{(k-1)\,!\,(i+l-1)\,!} \frac{(i+l-1)\,!}{(i-1)\,!\,l\,!} \hat{\theta}^{i+r-1}(1-\hat{\theta})^{k-1} \\ &\quad \times \frac{1}{s+a+u} \left(\frac{s+a+u}{T+a}\right)^{r-j-1} du \\ &= -\int_0^{T-s} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{j} \sum_{k \geq 1} \binom{i+k+l-2}{k-1} \hat{\theta}^{i+l+(r-l-1)}(1-\hat{\theta})^{k-1} \\ &\quad \times \binom{i+l-1}{l} \frac{1}{s+a+u} \left(\frac{s+a+u}{T+a}\right)^{r-j-1} du \\ &= -\int_0^{T-s} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{j} \binom{i+l-1}{l} \left(\frac{s+a}{s+a+u}\right) \hat{\theta}^{r-l-1} \frac{1}{s+a+u} \left(\frac{s+a+u}{T+a}\right)^{r-j-1} du \\ &= -\int_0^{T-s} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{j} \binom{i+j-1}{j} \left(\frac{(s+a)^{r-l-1}}{(T+a)^{r-j-1}}\right) (s+a+u)^{l-j-1} du \\ &= -\int_0^{T-s} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{i+j-1}{j} \left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j-1} \frac{du}{s+a+u} \\ &\quad -\int_0^{T-s} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{j-1} \binom{i+l-1}{l} \left(\frac{(s+a)^{r-l-1}}{(T+a)^{r-j-1}}\right) (s+a+u)^{l-j-1} du \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} \binom{i+j-1}{j} \left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j-1} \ln\left(\frac{s+a}{T+a}\right)\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{1}{j-l}\left\{\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-l-1}-\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j-1}\right\} \tag{10}$$

ただし，4番目の等号は，$0 \leq \hat{\theta} \leq 1$ に対して

$$\sum_{k\geq 1}\binom{i+k-1}{k-1}\hat{\theta}^{i+1}(1-\hat{\theta})^{k-1}=1 \tag{11}$$

を用いている．

したがって，$H_i^{(r)}(s)$ は $\theta=(s+a)/(T+a)$ とすると，

$$\begin{aligned} H_i^{(r)}(s) &= \sum_{j=0}^{r-1}\binom{i+j-1}{j}\theta^{r-j-1}(1+\ln\theta) \\ &\quad +\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{1}{j-l}(\theta^{r-l-1}-\theta^{r-j-1}) \end{aligned} \tag{12}$$

となる．

以上より $r=2$ のとき，$U_i^{(2)}(s)$，$H_i^{(2)}(s)$ はそれぞれ以下のようになり，Ano(2000) で得られたものと一致する．

$$U_i^{(2)}(s)=\frac{\theta(i+\theta)}{i+1},$$

$$H_i^{(2)}(s)=i(1+\ln\theta)+\theta\ln\theta+2\theta-1.$$

$r=2$ のときの最適停止時刻を以下に再掲載しておく．

定理 1 $(r=2)$(Ano(2000)) ポアソン過程の intensity λ の事前分布がガンマ分布 $Ga(2,1/a), a>0$ であるとき，最適停止時刻は，$s_i^{(2)*}$ 以降に到着する最初の相対的ベストが出現した時刻である．すなわち，最適停止時刻 τ_2^* は

$$\tau_2^*=\min\{s_i\in[\,s_i^{(2)*},T\,]:X_i=1\}.$$

ただし，X_i は i 番目に到着したアパートの相対的ランクを表す．ここで，$s_i^{(2)*}$ は，$H_i^{(2)}(s)=0$ の $(0,T\,]$ 間の唯一解である．$s_i^{(2)*}$ は i についての非増加列である．

3 最適停止時刻

自然数パラメータを持つガンマ分布 $Ga(r,1/a)$, $a>0$ に対する最適停止時刻を定理 2 として示す．証明のために補題 2 と補題 3 を準備する．

自然数 r のとき，(4) 式で求めたように，

$$U_i(s)=\frac{i(r-1)!}{(i+r-1)!}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(i+j-1)!}{j!}\theta^{r-j}. \tag{13}$$

ここで，$\theta=(s+a)/(T+a)$.

OLA 停止領域 $B_r=\{(i,s):H_i^{(r)}(s)\geq 0\}$ を特徴付ける関数 $H_i^{(r)}(s)$ に対して次の関係式が成立

$$H_{i+1}^{(r)}(s) - H_i^{(r)}(s) = H_{i+1}^{(r-1)}(s) \tag{14}$$

証明　(12) を

$$H_i^{(r)}(s) = \sum_{m=0}^{r-1} \binom{i+m-1}{m} C_m^{(r)} \tag{15}$$

と書き直す．ここで，

$$C_m^{(r)} = \theta^{r-m-1}(1+\ln\theta) + \sum_{j=m+1}^{r-1} \frac{1}{j-m}(\theta^{r-m-1} - \theta^{r-j-1}),\quad m = 0,1,\cdots,r-2 \tag{16}$$

$$C_{r-1}^{(r)} = 1 + \ln\theta \tag{17}$$

また，このとき

$$C_m^{(r)} = C_{m+1}^{(r+1)} \tag{18}$$

が成り立つ．

これを用いて，

$$\begin{aligned}
H_{i+1}^{(r)}(s) - H_i^{(r)}(s) &= \sum_{m=0}^{r-1} \left\{ \binom{i+m}{m} - \binom{i+m-1}{m} \right\} C_m^{(r)} \\
&= \sum_{m=0}^{r-1} \left(\frac{i+m}{i} - 1 \right) \binom{i+m-1}{m} C_m^{(r)} \\
&= \sum_{m=1}^{r-1} \binom{i+m-1}{m-1} C_m^{(r)} \\
&= \sum_{m=0}^{r-2} \binom{i+m}{m} C_{m-1}^{(r-1)} = H_{i+1}^{(r-1)}(s).
\end{aligned}$$

■

補題 3 次の 3 つのことが成り立つ．

(i) $H_i^{(r)}(s)$ は s についての増加関数．
(ii) $H_i^{(r)}(s) \geq 0$ ならば，$H_{i+1}^{(r)}(s) \geq 0$，$i = 1, 2, \ldots$.
(iii) $s_i^{(r)*}$ は i について非増加．

証明

(i) r についての帰納法による．$H_i^{(r+1)}(s)$ は

$$\begin{aligned}
H_i^{(r+1)}(s) &= \sum_{j=0}^{r} \binom{i+j-1}{j} \theta^{r-j}(1+\ln\theta) + \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=0}^{j-1} \binom{i+l-1}{l} \frac{1}{j-l}(\theta^{r-l} - \theta^{r-j}) \\
&= \theta H_i^{(r)}(s) + \binom{i+r-1}{r}(1+\ln\theta) + \sum_{l=0}^{r-1} \binom{i+l-1}{l} \frac{1}{r-l}(\theta^{r-l} - 1)
\end{aligned} \tag{19}$$

と書き直せる．したがって，$H_i^{(r)}(s)$ が $\theta(s)$ についての増加関数であるとき，$H_i^{(r+1)}(s)$ が $\theta(s)$ についての増加関数であることがわかる．また，$H_i^{(1)}(s)$ は $\theta(s)$ についての増加関数であるので，すべての自然数 r に対して $H_i^{(r)}(s)$ は $\theta(s)$ についての増加関数であることがいえる．

$$H_i^{(r)}(s) \geq 0 \Longrightarrow H_{i+1}^{(r)}(s) \geq 0,\ \ i = 1, 2, \cdots$$

を示す．補題 2 より

$$H_i^{(r+1)}(s) - H_{i-1}^{(r+1)}(s) = H_i^{(r)}(s)$$

であるから，

$$H_{i-1}^{(r+1)}(s) \geq 0 \Longrightarrow H_i^{(r)}(s) \geq 0$$

を示せば十分．そのためには，(i) より $H_i^{(r)}(s)$ が s についての増加関数であることからさらに

$$s_i^{(r)*} < s_{i-1}^{(r+1)*}$$

を示せばよい．つまり，

$$H_{i-1}^{(r+1)}(s_i^{(r)*}) < 0$$

を示す．$H_i^{(r)}(s) = 0$ のとき，

$$(1 + \ln\theta)\sum_{j=0}^{r-1}\binom{i+j-1}{j}\theta^{r-j-1} = \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{1}{j-l}(\theta^{r-j-1} - \theta^{r-l-1}) \tag{20}$$

であるから，

$$1 + \ln\theta < 0$$

したがって，

$$H_{i-1}^{(r+1)}(s_i^{(r)*}) = H_i^{(r+1)}(s_i^{(r)*}) = \binom{i+r-1}{r}(1 + \ln\theta) + \sum_{l=0}^{r-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{1}{r-l}(\theta^{r-l} - 1) < 0 \tag{21}$$

よって，示された．

(iii) (i) より，$H_i^{(r)}(s) = 0$ は唯一解 $s_i^{(r)*}$ をもち，OLA 停止領域 B_r は $B_r = \{(i, s) : s \geq s_i^{(r)*}\}$ となる．また，(ii) より

$$s_i^{(r)*} < s_i^{(r+1)*}$$

が示されている．よって，

$$s\begin{pmatrix}<\\ \geq\end{pmatrix}s_i^{(r)*}\text{のとき}, H_{i-1}(s)^{(r+1)}\text{は}\ i\ \text{について}\begin{pmatrix}\text{減少}\\ \text{増加}\end{pmatrix}\text{する．}$$

以上より，

$$s_i^{(r)*} \geq s_{i+1}^{(r)*}$$

がわかる． ■

定理 2 ポアソン過程のパラメータ λ の事前分布がガンマ分布 $Ga(r, 1/a), r$ は自然数，$a > 0$ に従うとき，最適停止規則は $s_i^{(r)*}$ 以降に到着する最初の相対的ベストを選択する，である．すなわち，最適停止時刻 τ_r^* は

$$\tau_r^* = \min\{s_i \in [\, s_i^{(r)*}, T\,] : X_i = 1\}.$$

$s_i^{(r)*}$ は $H_i^{(r)}(s) = 0$，すなわち，

$$\sum_{j=0}^{r-1}\binom{i+j-1}{j}\theta^{r-j-1}(1 + \ln\theta) + \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{1}{j-l}(\theta^{r-l-1} - \theta^{r-j-1}) = 0,$$

ただし，$\theta = (s + a)/(T + a)$，の唯一解として定まり，i についての非増加列である．

証明 補題3の (i) より,

$$H_i^{(r)}(s) \geq 0 \Longrightarrow H_i^{(r)}(s+u) \geq 0, \quad 0 < u \leq T-s$$

また，補題3の (ii) より

$$H_i^{(r)}(s) \geq 0 \Longrightarrow H_{i+1}^{(r)}(s) \geq 0,$$

以上より,

$$H_i^{(r)}(s) \geq 0 \Longrightarrow H_{i+k}^{(r)}(s+u) \geq 0, \quad 0 < u \leq T-s, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{22}$$

したがって，OLA 停止領域 B_r は closed となり，最適停止領域であることが示された．すなわち，B_r への first hitting time である τ_r^* が最適停止時刻となり，$\tau_r^* = \min\{s \geq s_i^{(r)*} : (i,s) \in B_r\} = \min\{s \in [s_i^{(r)*}, T] : X_i = 1\}$．$s_i^{(r)*}$ は i についての非増加列であることは補題3の (iii) より直ちに得られる． ■

残念ながら，最適停止時刻に従ったときにベストを得る最大確率を陽に求めることは難しい．$s_i^{(r)*}$ の極限に関して次が成立する．

定理 3

$$\lim_{i\to\infty} s_i^{(r)*} = \frac{T+a}{e} - a$$

証明

$$H_i^{(r)}(s) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + \ln\theta = -\sum_{m=0}^{r-2} \binom{i+m-1}{m} C_m^{(r)} \Big/ \binom{i+r-2}{r-1}$$

したがって，$i \to \infty$ のとき，右辺 $\to 0$ となる．よって,

$$\lim_{i\to\infty} s_i^{(r)*} = \frac{T+a}{e} - a$$

が示された． ■

よく知られたように古典的秘書問題の最適停止時刻を特徴付ける閾値は十分大きな観測数 n に対して n/e となる．これは定理3において λ のガンマ事前分布のパラメータ a を $a=0$ として得られる T/e と比べると興味深い．

ガンマ分布 $Ga(r, 1/a)$, $r = 3, 4, 5, 10$ について閾値 $t_i^{(r)*} \equiv (s_i^{(r)*} + a)/(T+a)$ を数値計算により求めた．結果は以下の表にまとめた．

参考文献

[1] Ano, K. (2000), "A Poisson arrival selection problem for Gamma prior density with parameter $r = 2$," *Proceedings of International Conference on Applied Stochastic System Modeling*, 1-8.

[2] 穴太 克則 (2000), "タイミングの数理—最適停止問題," 朝倉書店，東京.

表 1: $r = 3, 4, 5, 10$ のときの閾値

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50
$t_i^{(3)}$	.600198	.526948	.487532	.463460	.447350	.435847	.427234	.420549	.415212	.410854	.377036
$t_i^{(4)}$	.663076	.580234	.532041	.501277	.480094	.464665	.452941	.443739	.436326	.430229	.381515
$t_i^{(5)}$	.709002	.622828	.569494	.534148	.509195	.490694	.476449	.465150	.455973	.448374	.385930
$t_i^{(10)}$	.827215	.750056	.692738	.649759	.616621	.590372	.569095	.551512	.536744	.524167	.407095

[3] Bruss, F. T. (1987), "On an optimal selection problem by Cowan and Zabczyk," J. Appl. Prob., **24**, 918-928.

[4] Chow, Y. S., Robbins, H. and Siegmond, D. (1971), *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*, Houghton Miffilin Co., Boston.

[5] Cowan, R. and Zabczyk, J. (1978), "An optimal selection problem associated with the Poisson process," Theory Prob. Appl., **23**, 584-592.

[6] Ross, S. M. (1970), *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco.

[7] Stewart, T. J. (1981), "The secretary problem with an unknown number of option," Oper. Res., **25**, 130-145.